



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

# **Claims Reserving 2.0: dai modelli deterministici alle valutazioni stocastiche**

**Corso di formazione attuariale**

**12 Settembre 2024**

**Alessandro Barbaro**

# Indice



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

- Analisi Esplorative
- Osservazione dei Run-Off
- Costruzione Triangoli di Run-Off
- Stima della Riserva Sinistri con Chain Ladder (Paid & Incurred)
- Sensitivity sui Link Ratio
- Chain Ladder con aggiustamento inflazione
- Formula di Mack
- Bootstrapping
- Modelli GLM



# ANALISI ESPLORATIVE

# Analisi Esplorative (1/12)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

L'attività di reserving non consiste solo nell'applicazione di una serie, più o meno complessa, di modelli attuariali.

La stima non può prescindere dall'osservazione attenta della realtà.

La determinazione della riserva sinistri implica quindi tutta una serie di analisi esplorative, indispensabili per conoscere meglio il processo di riservazione/liquidazione e le caratteristiche del portafoglio che si sta analizzando.

Le valutazioni preliminari possono interessare la distribuzione della severità del danno, i sinistri «large» ed i principali indicatori tecnici (costi medi, velocità di liquidazione, ecc.).

# Analisi Esplorative (2/12)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Sinistri Large/Attritional

Una prima valutazione dei sinistri può consistere nella classificazione degli importi (pagati e riservati) in base al livello di severity del danno.

Un sinistro «**large**» è caratterizzato da un importo del danno considerato «significativo» in base ad uno o più criteri:

- Analisi dei percentili della distribuzione dell'onere sinistri;
- Utilizzo di dati di mercato (in particolar modo sulla RCA);
- Valutazioni sui trattati di riassicurazione;
- Considerazioni in base alla politica di liquidazione/riservazione.

# Analisi Esplorative (3/12)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Sinistri Large/Attritional

Un sinistro «**attritional**» è caratterizzato da un importo del danno considerato non «significativamente» elevato.

Il costo del sinistro va valutato rispetto ad una serie di variabili e può essere stratificato per ramo ministeriale, LoB, tipo di danno (ad esempio cose, persone, veicolo per la RCA).

Ad esempio, un «large» RCA può avere un importo significativamente diverso da un «large» CVT.

# Analisi Esplorative (4/12)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Sinistri Large/Attritional



Esempio in R di classificazione dei sinistri «large» col metodo dei percentili.

## Sinistri Aggravati e rivalutazioni/svalutazioni della riserva

Nonostante i sinistri large siano quelli maggiormente presidiati, è interessante analizzare i sinistri che sono large latenti, ovvero quelli che sono rubricati con importi non particolarmente elevati (minori di una determinata soglia) e che vengono poi rivalutati con importi più consistenti.

Il fenomeno «**aggravati**» può avere impatti molto significativi sui bilanci delle compagnie assicurative e riguarda tendenzialmente i sinistri più “giovani”, specialmente quelli di generazione corrente, dal momento che nella fase di apertura del sinistro il liquidatore potrebbe non avere a disposizione tutti gli elementi che concorrono alla precisa valutazione del danno.

Sono considerati quindi «aggravati», i sinistri rubricati come attritional e che vengono poi rivalutati, diventando così large.

## Sinistri Aggravati e rivalutazioni/svalutazioni della riserva

Per analizzare meglio le movimentazioni di riserva dei sinistri con seguito di generazione corrente (aggravati e non) è opportuno osservarne le rivalutazioni/svalutazioni con una determinata periodicità (settimanale, mensile, trimestrale, ecc.).

Nel caso di un monitoraggio mensile, si può confrontare il valore del sinistro alla fine del mese in cui è stato rubricato, col valore dello stesso nelle diverse date di valutazione. Ad esempio, per il bilancio 2023, si può ricavare la rivalutazione/svalutazione del sinistro come differenza tra il primo costo osservato ed il valore a fine 2023.

I sinistri possono così essere aggregati in diverse fasce di rivalutazione/svalutazione.

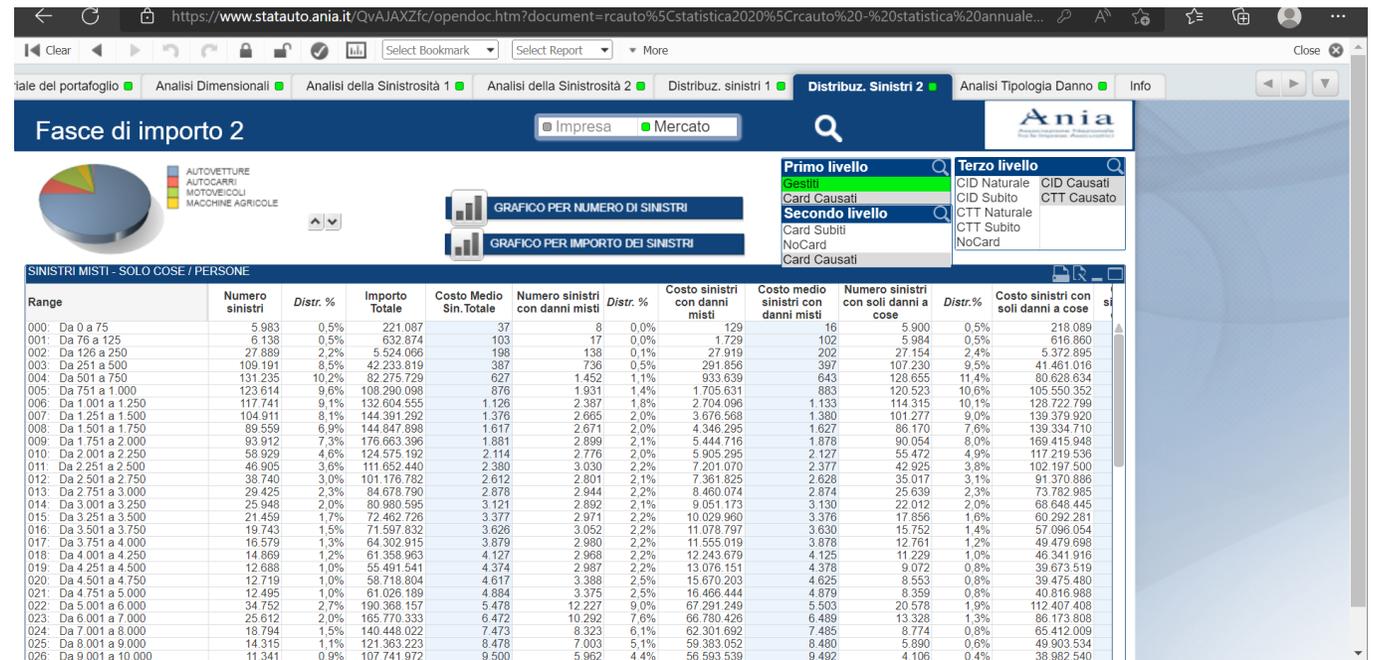
# Analisi Esplorative (7/12)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Fasce Costo

In base all'onere sinistri è possibile creare delle fasce. Queste possono derivare da un'analisi della distribuzione della riserva sinistri, del costo complessivo dei risarcimenti o da considerazioni basate sui dati di mercato.



Statistica Annuale RCA

Fonte: ANIA

# Analisi Esplorative (8/12)



S.I.A. s.r.l.  
SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Sinistri Aggravati, rivalutazioni/svalutazioni della riserva e fasce di costo



Esempio in R di valutazione dell'incidenza dei sinistri «aggravati», di creazione delle fasce di rivalutazione/svalutazione e delle fasce di costo.

# Analisi Esplorative (9/12)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Sinistri Evoluti

I sinistri possono essere presenti in diversi anni di bilancio.

Un sinistro può essere considerato in un determinato bilancio perché è stato rubricato (tardivamente o meno) nell'esercizio, perché è stato riaperto nell'esercizio o perché è a riserva entrante nell'esercizio.

Per evolvere i sinistri occorre recuperare l'informazione, tipicamente del pagato e del riservato, nei diversi bilanci in cui il sinistro è presente per arrivare al costo evoluto del sinistro all'ultima vista di bilancio. Questo è pari alla somma del pagato cumulato e dell'ultima riserva.

# Analisi Esplorative (10/12)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Sinistri Evoluti



Esempio in R creazione dei sinistri evoluti.

# Analisi Esplorative (11/12)

## Indici Liquidativi

Alcuni esempi:

- Costo Medio =  $(\text{Pagato} + \text{Riservato}) / (\text{Denunciati} - \text{Senza Seguito})$
- Pagato Medio =  $\text{Pagato Importi} / \text{Pagato Numeri}$
- Riservato Medio =  $\text{Riservato Importi} / \text{Riservato Numeri}$
- Velocità Liquidazione numeri =  $\text{Pagati numeri} / (\text{Pagato numeri} + \text{Riservato numeri})$
- Velocità Liquidazione importi =  $\text{Pagato} / (\text{Pagato} + \text{Riservato})$
- Confronti col mercato



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

# Analisi Esplorative (12/12)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Indici Liquidativi



Esempio in R di creazione di alcuni indici liquidativi.



# OSSERVAZIONE DEI RUN-OFF

# Osservazione dei Run-Off (1/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

L'osservazione dello smontamento è già una prima forma di backtesting che aiuta a capire se le stime appostate a bilancio hanno tenuto (o meno) e come si è sviluppata la storia di una compagnia in materia di riserva sinistri.

Run-Off Riserva Entrante in  $t$  =  
=Riserva Entrante in  $t$  – Pagato Prec. in  $t$  – Riservato Prec. in  $t$

Per valutare il contributo dello smontamento al saldo tecnico di una compagnia si può utilizzare il Run-Off Ratio = Run-Off/Premi di Competenza.

Per capire il livello di prudenza (o meno) della riserva civilistica si può rapportare il Run-Off in  $t$  sulla Riserva Entrante in  $t$ .

# Osservazione dei Run-Off (2/9)



Sviluppo Iniziative Attuariali

Si possono confrontare i dati di una determinata compagnia con quelli di mercato, che vengono pubblicati da ANIA e sono consultabili, in maniera dinamica, sul portale Infobila.

Esistono svariati indicatori interessanti anche rispetto al tema riserva sinistri, come:

- «Suff. / Insuff. Riserva sinistri esercizi precedenti / Premi di competenza»;
- «Sinistri dell'esercizio corr. pagati / Sinistri dell'esercizio corr. pagati e riservati»;
- Ecc..

**Ania SAFE** **DISPONIBILI I DATI 2021!** **Infobila** ESCI STAMPA ESPORTA Cambia password Edizione 2022

[Infobila](#) [Preferenze](#) [Premi](#) [Bilanci](#) [Conti tecnici](#) [Indici tecnici](#) [Report di sintesi](#) [Contatti](#)

**COMUNICAZIONE IMPORTANTE**

Vi informiamo che, al fine di allineare la fruizione di questo portale alla policy adottata da ANIA in materia di libera Concorrenza e Mercato, in base alla quale i risultati di una rilevazione associativa possono essere distribuiti gratuitamente solo a chi fornisce il dato, dalla prima settimana di agosto 2022 il portale sarà consultabile (in maniera non discriminatoria) anche alle imprese che non hanno fornito il dato, attraverso il pagamento di un abbonamento annuale. Per informazioni e supporto rivolgersi a [commerciale@aniasafe.it](mailto:commerciale@aniasafe.it)

We hereby inform you that, in order to ensure that the use of this portal is in line with the policy adopted by ANIA on Free Competition and Market, according to which the results of an association survey can only be distributed free of charge to those who provide the data, from the first week of August 2022 the portal will also be accessible (in a non-discriminatory manner) to all other companies that have not provided the data but through the payment of an annual subscription. For information and support please contact [commerciale@aniasafe.it](mailto:commerciale@aniasafe.it)

[Informativa privacy](#) Sono disponibili i dati di bilancio 2021 [www.ania.it](http://www.ania.it)

# Osservazione dei Run-Off (3/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Per verificare la tenuta della riserva sinistri occorre analizzare il trend storico dei run-off con diversi livelli di granularità:

- tipologia (da pagamento, da senza seguito, da riapertura, da movimentazione riserva e da IBNR);
- anno di accadimento del sinistro;
- ramo ministeriale, LoB o HRG;
- severity del sinistro (large/attritional o per fasce di riserva entrante);
- dettaglio per sinistro (o sinistro-gestione per la RCA);
- ecc.ecc..

# Osservazione dei Run-Off (4/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

I **Moduli di Vigilanza 28** consentono di analizzare lo smontamento della riserva sinistri dei Rami Elementari utilizzando le seguenti formule:

## **Avanzo/Disavanzo da Pagamento**

$R1 - A =$  Riserva caduta da pagamento - Pagato di sinistri a riserva entrante

## **Avanzo da Senza Seguito**

$R3 =$  Riserva caduta da Senza Seguito

## **Disavanzo da Riapertura**

$-(F+R6) = -$  (Pagato da riapertura + Riserva da riapertura)

## **Avanzo/Disavanzo da Riduzione/Rivalutazione Riserva**

$R0 - (R1+R3+R4) =$  Riserva entrante - (Riserva caduta da Pagamento + Riserva caduta da Senza Seguito + Riserva residua di sinistri a riserva entrante)



# Osservazione dei Run-Off (5/9)

I **Moduli di Vigilanza 29** consentono di analizzare lo smontamento della riserva sinistri del ramo ministeriale RCG utilizzando le seguenti formule:

## **Avanzo/Disavanzo da Pagamento**

$(R1+R2) - (A+B) =$  (Riserva caduta da pagamento definitivo + Riserva caduta da pagamento parziale) - (Pagato definitivo di sinistri a riserva entrante + Pagato parziale di sinistri a riserva entrante)

## **Avanzo da Senza Seguito**

$R3 =$  Riserva caduta da Senza Seguito

## **Disavanzo da Riapertura**

$-(H+I+R10) = -$  (Pagato definitivo da riapertura + Pagato parziale da riapertura + Riserva da riapertura)

## **Avanzo/Disavanzo da Riduzione/Rivalutazione Riserva**

$S2 =$  Riduzione / Rivalutazione riserva

# Osservazione dei Run-Off (6/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

I **Moduli di Vigilanza 29A** consentono di analizzare lo smontamento della riserva sinistri del ramo ministeriale RCA (per gestione), utilizzando le seguenti formule:

## **Avanzo/Disavanzo da Pagamento**

$(R1+R2) - (A+B) =$  (Riserva caduta da pagamento definitivo + Riserva caduta da pagamento parziale) - (Pagato definitivo di sinistri a riserva entrante + Pagato parziale di sinistri a riserva entrante)

## **Avanzo da Senza Seguito**

$R3+R4 =$  Riserva caduta da Senza Seguito + Riserva caduta da Movimento in entrata

## **Disavanzo da Riapertura**

$-(H+I+R13) = -$  (Pagato definitivo da riapertura + Pagato parziale da riapertura + Riserva da riapertura)

## **Avanzo/Disavanzo da Riduzione/Rivalutazione Riserva**

$S2 =$  Riduzione / Rivalutazione riserva

# Osservazione dei Run-Off (7/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Run-Off «corto»

Si vede lo smontamento della generazione relativamente all'ultimo bilancio.

Esempio: quanto ha smontato nel 2023 la generazione 2022 (dopo 1 anno), quanto ha smontato nel 2023 la generazione 2021 (dopo 2 anni), ecc..

Generazione	Riserva Entrante 2023	Run-Off da:					
		Pagamenti	Senza Seguito	Riaperti	Riserva Residua	IBNR	Totale
2017	100.000	15.000	0	0	-10.000	0	5.000
2018	600.000	-50.000	0	0	-100.000	0	-150.000
2019	1.000.000	-50.000	5.000	-10.000	-45.000	0	-100.000
2020	1.500.000	100.000	150.000	-35.000	30.000	0	245.000
2021	3.600.000	400.000	150.000	-50.000	-50.000	50.000	500.000
2022	9.200.000	600.000	450.000	-200.000	150.000	200.000	1.200.000
<b>Totale</b>	<b>16.000.000</b>	<b>1.015.000</b>	<b>755.000</b>	<b>-295.000</b>	<b>-25.000</b>	<b>250.000</b>	<b>1.700.000</b>

# Osservazione dei Run-Off (8/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Run-Off «lungo»

Si vede lo smontamento della generazione relativamente a diversi momenti di valutazione (bilanci).

Esempio: quanto ha smontato la generazione 2022 nel 2023 (dopo 1 anno), quanto ha smontato la generazione 2021 nel 2022 (dopo 1 anno), nel 2023 (dopo 2 anni), ecc.

Run-Off	0	1	2	3	4	5	6
2017		1.000.000	150.000	50.000	-100.000	-5.000	5.000
2018		-800.000	600.000	100.000	-100.000	-150.000	
2019		1.500.000	500.000	-350.000	-100.000		
2020		500.000	800.000	245.000			
2021		1.500.000	500.000				
2022		1.200.000					
2023							

# Osservazione dei Run-Off (9/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI



Alcuni esempi in R sull'analisi dei run-off.



# COSTRUZIONE TRIANGOLI RUN-OFF



# I triangoli di run-off (1/11)

I dati disponibili vengono raccolti nei cosiddetti «triangoli di run-off», che mostrano le informazioni per anno di accadimento e per anno di sviluppo.

Il seguente esempio mostra come leggere gli input degli **importi pagati**.

Anno di sviluppo dei sinistri = indica quanti anni sono trascorsi dall'accadimento al pagamento

ESEMPIO: triangolo di run-off degli importi pagati  
Dati aggiornati a bilancio 2023

<b>Pagati Incrementali</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.300.000	7.200.000	400.000	200.000	90.000	87.000	70.000	36.000
2017	11.700.000	7.100.000	410.000	180.000	80.000	70.000	40.000	
2018	12.200.000	7.800.000	500.000	200.000	110.000	100.000		
2019	15.300.000	9.400.000	500.000	280.000	130.000			
2020	17.800.000	10.700.000	600.000	300.000				
2021	18.200.000	11.100.000	900.000					
2022	16.300.000	10.400.000						
2023	20.200.000							

Generazione dei sinistri = Anno di accadimento

Questa cella riporta i pagamenti effettuati nel 2023 sui sinistri di generazione 2021

Le diagonali del triangolo rappresentano quindi gli anni di bilancio

# I triangoli di run-off (2/11)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Nella tabella sotto si vede il triangolo degli **importi riservati**.

ESEMPIO: triangolo di run-off degli importi riservati  
Dati aggiornati a bilancio 2023

<b>Importo Riservato</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	9.400.000	2.300.000	1.200.000	600.000	420.000	180.000	60.000	20.000
2017	9.500.000	1.800.000	1.100.000	400.000	280.000	130.000	90.000	
2018	10.200.000	1.900.000	800.000	280.000	140.000	150.000		
2019	12.100.000	2.500.000	1.400.000	490.000	550.000			
2020	13.100.000	1.800.000	800.000	470.000				
2021	14.700.000	2.600.000	1.500.000					
2022	12.700.000	2.200.000						
2023	16.400.000							

Il valore della riserva al bilancio 2023 sarà quindi data dalla somma dell'ultima diagonale, pari a **21.380.000 €**.

# I triangoli di run-off (3/11)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

La struttura triangolare contiene tutte le informazioni osservate e aggiornate alla data di bilancio.

Obiettivo della valutazione della riserva sinistri è stimare il triangolo inferiore, che rappresenta l'aspettativa di pagamenti futuri dei sinistri già accaduti.

Le generazioni più vecchie potrebbero non essere ancora chiuse al momento della valutazione; in questo caso, sarà necessario stimare anche una «coda» del triangolo, che considera l'evoluzione e la liquidazione definitiva degli ultimi sinistri ancora aperti.

Triangolo di run-off	0	1	2	3	4	5	6	7	8+
2016									
2017									
2018									
2019									
2020									
2021									
2022									
2023									

**Dati osservati** (green cells)

**Stime** (orange cells)

**Fattore coda** (yellow cells)

# I triangoli di run-off (4/11)



S.I.A. s.r.l.  
SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Nelle tabelle sotto si vedono degli esempi relativi ai **numeri dei sinistri pagati e riservati**

ESEMPIO: triangolo di run-off dei numeri di sinistri pagati e riservati  
Dati aggiornati a bilancio 2023

<b>Numero Pagati</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	9.100	3.200	120	45	19	18	13	4
2017	10.200	3.330	135	40	15	10	4	
2018	9.800	3.150	150	44	21	15		
2019	11.200	3.650	145	60	25			
2020	12.400	4.470	180	65				
2021	13.200	4.500	295					
2022	11.550	4.400						
2023	14.700							

<b>Numero Riservati</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	2.300	450	230	110	75	32	10	2
2017	2.250	350	215	75	48	20	8	
2018	2.480	365	155	52	25	24		
2019	2.900	480	270	90	95			
2020	3.100	350	155	85				
2021	3.580	510	290					
2022	2.910	435						
2023	3.940							

# I triangoli di run-off (5/11)



S. I. A. s.r.l.  
SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Le tabelle sotto mostrano i valori del **Costo Medio Pagato (CMP)** e del **Costo Medio Riservato (CMR)**.

ESEMPIO: triangolo di run-off dei costi medi di pagato e riservato  
Dati aggiornati a bilancio 2023

<b>Costo Medio Pagato</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	1.242	2.250	3.333	4.444	4.737	4.833	5.385	9.000
2017	1.147	2.132	3.037	4.500	5.333	7.000	10.000	
2018	1.245	2.476	3.333	4.545	5.238	6.667		
2019	1.366	2.575	3.448	4.667	5.200			
2020	1.435	2.394	3.333	4.615				
2021	1.379	2.467	3.051					
2022	1.411	2.364						
2023	1.374							

<b>Costo Medio Riservato</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	4.087	5.111	5.217	5.455	5.600	5.625	6.000	10.000
2017	4.222	5.143	5.116	5.333	5.833	6.500	11.250	
2018	4.113	5.205	5.161	5.385	5.600	6.250		
2019	4.172	5.208	5.185	5.444	5.789			
2020	4.226	5.143	5.161	5.529				
2021	4.106	5.098	5.172					
2022	4.364	5.057						
2023	4.162							

# I triangoli di run-off (6/11)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Il triangolo per valutare l'incidenza del riservato medio sul pagato medio è determinato come **CMR/CMP**.

ESEMPIO: triangolo di run-off di CMR/CMP  
Dati aggiornati a bilancio 2023

Costo Medio Riservato/Costo Medio Pagato	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	3,291	2,272	1,565	1,227	1,182	1,164	1,114	1,111
2017	3,681	2,412	1,685	1,185	1,094	0,929	1,125	
2018	3,304	2,102	1,548	1,185	1,069	0,938		
2019	3,054	2,022	1,504	1,167	1,113			
2020	2,944	2,148	1,548	1,198				
2021	2,978	2,067	1,695					
2022	3,092	2,140						
2023	3,029							

Si osserva che nelle prime antidurate il costo medio riservato è circa il triplo di quello pagato, dal momento che vengono tendenzialmente liquidati più velocemente i sinistri meno complessi e con un costo inferiore.

Negli sviluppi successivi i costi medi pagati e riservati tendono gradualmente ad avvicinarsi.

# I triangoli di run-off (7/11)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

La **velocità di liquidazione per importi** è ricavata rapportando il pagato cumulato al valore Incurred.

ESEMPIO: triangolo di run-off degli importi pagati  
Dati aggiornati a bilancio 2023

<b>Velocità di Liquidazione per importi</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	54,6%	88,9%	94,0%	97,0%	97,9%	99,1%	99,7%	99,9%
2017	55,2%	91,3%	94,6%	98,0%	98,6%	99,3%	99,5%	
2018	54,5%	91,3%	96,2%	98,7%	99,3%	99,3%		
2019	55,8%	90,8%	94,7%	98,1%	97,9%			
2020	57,6%	94,1%	97,3%	98,4%				
2021	55,3%	91,8%	95,3%					
2022	56,2%	92,4%						
2023	55,2%							

Nell'esempio si vede che, mediamente, già alla seconda antidurata circa il 95% degli importi è stato liquidato.

# Triangoli run-off (8/11)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

E' possibile analizzare alcuni dati di mercato sotto forma di triangoli di run-off scaricando dal sito IVASS i bollettini statistici al seguente indirizzo:

<https://www.ivass.it/pubblicazioni-e-statistiche/statistiche/bollettino-statistico/index.html>

I bollettini statistici presentano una serie piuttosto strutturata di analisi e sono composti da diversi allegati excel che sono alimentati dai dati dei Moduli di Vigilanza.

### BOLLETTINO STATISTICO

I Bollettini Statistici, annuali o trimestrali, presentano un'analisi statistica descrittiva dei principali dati che interessano il mercato assicurativo.

Nella sezione figurano: il bollettino sui prezzi effettivi per la garanzia r.c. auto, la responsabilità civile generale, il comparto salute e i rami vita.

I bollettini contengono di solito grafici e tavole, unitamente a commenti e osservazioni utili a interpretare i trend delle variabili di interesse, quali l'andamento dei premi e del costo/frequenza dei sinistri.

#### Ultime pubblicazioni

- Bollettino Statistico Anno XI - n. 3 - marzo 2024**  
Descrizione: I rischi da responsabilità civile generale e sanitaria in Italia  
**26 marzo 2024**
- Bollettino Statistico Anno XI - n. 2 - febbraio 2024**  
Descrizione: L'attività assicurativa nel comparto salute (2017-2022)  
**20 febbraio 2024**
- Bollettino Statistico Anno XI - n. 1 - gennaio 2024**  
Descrizione: L'attività assicurativa nel comparto auto (2017-2022)  
**29 gennaio 2024**
- Bollettino Statistico Anno X - n. 5 - dicembre 2023**  
Descrizione: Gestioni Separate Vita (2017-2022)  
**29 dicembre 2023**
- Bollettino Statistico Anno X - n. 4 - dicembre 2023**  
Descrizione: La produzione del settore Vita: raccolta premi e offerta commerciale  
**20 dicembre 2023**

# Triangoli run-off (9/11)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Negli allegati ai bollettini statistici le informazioni sui sinistri sono rappresentate principalmente con triangoli di run-off che evidenziano l'andamento di una serie di indici.

RAMO CORPI DI VEICOLI TERRESTRI (CVT)
INDICE DELLE TAVOLE STATISTICHE
Tavola n. 1: premi lordi contabilizzati
Tavola n. 2: distribuzione dei premi lordi contabilizzati per fasce di mercato
Tavola n. 3: raccolta premi per gruppo assicurativo
Tavola n. 4: incidenza della riserva premi sui premi lordi contabilizzati nei singoli esercizi
Tavola n. 5: premi di competenza nei singoli esercizi
Tavola n. 6: composizione delle spese di gestione e loro incidenza sui premi lordi contabilizzati
Tavola n. 7: distribuzione delle spese di gestione per fasce di mercato
Tavola n. 8: rapporto sinistri dell'esercizio a premi di competenza per generazione e antidurata
Tavola n. 9: numero dei sinistri denunciati e con seguito
Tavola n. 10: distribuzione del numero dei sinistri eliminati senza seguito
Tavola n. 11: distribuzione del numero dei sinistri riaperti
Tavola n. 12: distribuzione del numero dei sinistri senza seguito al netto dei riaperti
Tavola n. 13: velocità di liquidazione dei sinistri per numeri (al netto della stima finale per sinistri tardivi)
Tavola n. 13-1: velocità di liquidazione dei sinistri per numeri (al lordo della stima finale per sinistri tardivi)
Tavola n. 14: velocità di liquidazione dei sinistri per importi (al netto della stima finale per sinistri tardivi)
Tavola n. 14-1: velocità di liquidazione dei sinistri per importi (al lordo della stima finale per sinistri tardivi)
Tavola n. 15: sinistri pagati dell'esercizio e degli esercizi precedenti
Tavola n. 16: sinistri riservati dell'esercizio e degli esercizi precedenti (al netto della stima finale per sinistri tardivi)
Tavola n. 17: costo medio del pagato e del riservato per antidurata (al netto della stima finale per sinistri tardivi)
Tavola n. 18: costo medio dei sinistri con seguito dall'anno di accadimento
Tavola n. 18-bis: costo medio dei sinistri con seguito dall'anno di accadimento, con rivalutazione degli importi pagati negli anni precedenti in base all'indice dei prezzi al consumo per famiglie di operai e di impiegati (FOI), al netto dei tabacchi
Tavola n. 18-ter: indicatori di costo medio dei sinistri denunciati nell'anno di accadimento e al lordo della stima finale per sinistri tardivi con rivalutazione degli importi pagati negli anni precedenti in base all'indice dei prezzi al consumo per famiglie di operai e di impiegati (FOI), al netto dei tabacchi
Tavola n. 19: sviluppo della riserva sinistri
Tavola n. 20: sviluppo della riserva sinistri per fasce di mercato
Tavola n. 21: sinistri in causa pagati e riservati per antidurata
Tavola n. 22: indicatori dei sinistri
Tavola n. 23: indicatori dei sinistri per fasce di mercato
Tavola n. 24: sintesi del conto tecnico del ramo
Tavola n. 25: indicatori desunti dal conto tecnico
Tavola n. 26: indice di smontamento della riserva sinistri

**Bollettino Statistico Anno XI - n. 1 - gennaio 2024**

**descrizione**  
Il Bollettino mostra e commenta i dati salienti dell'attività assicurativa nel comparto auto tra 2017 e 2022

**data**  
29 gennaio 2024

(Ultimo aggiornamento: 29 gennaio 2024)

Condividi su:

[f](#) [X](#) [in](#) [✉](#)

**TESTO DELLA PUBBLICAZIONE**

- [Bollettino Statistico Anno XI - n. 1 - gennaio 2024 pdf 2.4 MB](#)

**ALTRI DOCUMENTI**

- [A - Tavole r.c.auto xlsx 526.4 KB](#)
- [B - Tavole cvt xlsx 1.3 MB](#)
- [C - Tavole dati tecnici r.c.auto zip 398.7 KB](#)

# Triangoli run-off (10/11)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

I triangoli di run-off possono essere costruiti con diversi livelli di differimento temporale. Nelle valutazioni di bilancio tendenzialmente si utilizzano antidurate determinate come differenza tra anno di osservazione ed anno di generazione.

In molte valutazioni, specialmente in quelle trimestrali, è utile costruire le antidurate come differenza tra mese/trimestre di osservazione e mese/trimestre di avvenimento del sinistro.

Ad esempio un sinistro avvenuto a febbraio 2023 e valutato in III Trimestrale 2023 avrà trimestre di generazione pari a 2023Q1 ed antidurata 2 (III Trimestre 2023 – I Trimestre 2023).

# Creazione triangoli (11/11)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI



Esempio in R di creazione dei triangoli di Run-Off.



# CHAIN LADDER (PAID & INCURRED)

# Chain Ladder Paid (1/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

I triangoli di run-off rappresentano il punto di partenza per l'applicazione delle metodologie statistiche di stima della riserva sinistri.

Il metodo più utilizzato è noto come «Chain Ladder» o «metodo della catena».

La prima formulazione di questo metodo è chiamata Chain Ladder Paid, e si basa sugli importi cumulati, che si ottengono facilmente a partire dal triangolo degli importi pagati incrementali. Per ogni generazione, vengono sommati tutti i pagamenti effettuati nei diversi anni di sviluppo.

ESEMPIO: triangolo di run-off degli importi pagati cumulati

Dati aggiornati a bilancio 2023

Pagati Cumulati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.300.000	18.500.000	18.900.000	19.100.000	19.190.000	19.277.000	19.347.000	19.383.000
2017	11.700.000	18.800.000	19.210.000	19.390.000	19.470.000	19.540.000	19.580.000	
2018	12.200.000	20.000.000	20.500.000	20.700.000	20.810.000	20.910.000		
2019	15.300.000	24.700.000	25.200.000	25.480.000	25.610.000			
2020	17.800.000	28.500.000	29.100.000	29.400.000				
2021	18.200.000	29.300.000	30.200.000					
2022	16.300.000	26.700.000						
2023	20.200.000							

Questa cella riporta la somma di tutti i pagamenti effettuati fino al 2023 sui sinistri di generazione 2020.

# Chain Ladder Paid (2/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

L'assunzione fondamentale del Chain Ladder è l'indipendenza dei fattori di sviluppo rispetto alla coorte di appartenenza.

La progressione dei risarcimenti cumulati deve quindi essere stabile per le varie generazioni, a meno di variazioni aleatorie. I Link Ratio non dipendono quindi dalla generazione ma dall'anno di sviluppo. I pagamenti cumulati di due antidurate adiacenti sono tra loro proporzionali, a meno di una componente erratica a media nulla.

Possono comunque verificarsi distorsioni in grado di indebolire il modello, specialmente dovute a cambiamenti nella politica di riservazione e di liquidazione dei sinistri o a fattori esogeni, come ad esempio un significativo aumento dell'inflazione.

# Chain Ladder Paid (3/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Il triangolo degli importi cumulati consente di calcolare i «Link Ratio», o fattori di sviluppo, che sono il rapporto tra il valore cumulato in  $t+1$  ed il valore cumulato in  $t$ .

Il fattore di sviluppo è un indicatore che misura l'evoluzione osservata dei pagamenti, di una specifica generazione, da un anno di osservazione al successivo.

ESEMPIO: triangolo di run-off dei Link Ratio  
Dati aggiornati a bilancio 2023

Link Ratio	1	2	3	4	5	6	7
2016	1,6372	1,0216	1,0106	1,0047	1,0045	1,0036	1,0019
2017	1,6068	1,0218	1,0094	1,0041	1,0036	1,0020	
2018	1,6393	1,0250	1,0098	1,0053	1,0048		
2019	1,6144	1,0202	1,0111	1,0051			
2020	1,6011	1,0211	1,0103				
2021	1,6099	1,0307					
2022	1,6380						
2023							

Questa cella si ottiene come il rapporto tra la somma dei pagamenti effettuati per la generazione 2021 fino al 2023 e la somma dei pagamenti effettuati per la generazione 2021 fino al 2022.

# Chain Ladder Paid (4/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

L'individuazione di opportuni valori di sintesi, applicati agli importi cumulati alla data di valutazione, consente di stimare l'evoluzione futura dei pagamenti nel triangolo inferiore, ottenendo una stima a costo ultimo di ogni generazione.

Per ogni anno di sviluppo, si determina quindi un Link Ratio «medio» sulla base di valutazioni attuariali degli andamenti osservati, individuando un vettore univoco da applicare alla diagonale per ottenere la stima del triangolo inferiore.

## ESEMPIO: diversi valori di sintesi di Link Ratio

Dati aggiornati a bilancio 2023

	1	2	3	4	5	6	7
Media Ponderata	1,619650	1,023677	1,010274	1,004842	1,004322	1,002834	1,001861
Media Semplice	1,620969	1,023407	1,010226	1,004813	1,004311	1,002839	1,001861
Media Ponderata 3 anni	1,615679	1,024242	1,010428	1,004880	1,004322	1,002834	1,001861
Media Semplice 3 anni	1,616350	1,024004	1,010392	1,004847	1,004311	1,002839	1,001861
Media Ponderata 5 anni	1,619048	1,023990	1,010274	1,004842	1,004322	1,002834	1,001861
Media Semplice 5 anni	1,620555	1,023764	1,010226	1,004813	1,004311	1,002839	1,001861
Min	1,601124	1,020243	1,009370	1,004126	1,003595	1,002047	1,001861
Max	1,639344	1,030717	1,011111	1,005314	1,004805	1,003631	1,001861

# Chain Ladder Paid (5/6)



Sviluppo Iniziative Attuariali

Una volta individuato il vettore di Link Ratio, questo viene applicato alla diagonale del triangolo degli importi cumulati per ottenere l'evoluzione dei pagamenti complessivi degli anni futuri.

ESEMPIO: stima triangolo inferiore col metodo Chain Ladder Paid  
Dati aggiornati a bilancio 2023

Cumulati Stimati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.300.000	18.500.000	18.900.000	19.100.000	19.190.000	19.277.000	19.347.000	19.383.000
2017	11.700.000	18.800.000	19.210.000	19.390.000	19.470.000	19.540.000	19.580.000	19.616.434
2018	12.200.000	20.000.000	20.500.000	20.700.000	20.810.000	20.910.000	20.969.255	21.008.274
2019	15.300.000	24.700.000	25.200.000	25.480.000	25.610.000	25.720.674	25.793.561	25.841.557
2020	17.800.000	28.500.000	29.100.000	29.400.000	29.542.364	29.670.032	29.754.111	29.809.476
2021	18.200.000	29.300.000	30.200.000	30.510.265	30.658.006	30.790.494	30.877.749	30.935.205
2022	16.300.000	26.700.000	27.332.167	27.612.969	27.746.680	27.866.588	27.945.556	27.997.556
2023	20.200.000	32.716.926	33.491.554	33.835.635	33.999.479	34.146.408	34.243.172	34.306.890

Incrementali Stimati	0	1	2	3	4	5	6	7	Riserva Stimata
2016	11.300.000	7.200.000	400.000	200.000	90.000	87.000	70.000	36.000	0
2017	11.700.000	7.100.000	410.000	180.000	80.000	70.000	40.000	36.434	36.434
2018	12.200.000	7.800.000	500.000	200.000	110.000	100.000	59.255	39.019	98.274
2019	15.300.000	9.400.000	500.000	280.000	130.000	110.674	72.888	47.995	231.557
2020	17.800.000	10.700.000	600.000	300.000	142.364	127.668	84.079	55.365	409.476
2021	18.200.000	11.100.000	900.000	310.265	147.741	132.489	87.254	57.456	735.205
2022	16.300.000	10.400.000	632.167	280.802	133.711	119.907	78.969	52.000	1.297.556
2023	20.200.000	12.516.926	774.628	344.081	163.843	146.929	96.764	63.718	14.106.890
									<b>16.915.391</b>

# Chain Ladder Paid (6/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI



Esempio in R di stima della riserva sinistri con metodologia Chain Ladder Paid.

# Chain Ladder Incurred (1/5)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

La seconda formulazione di questo metodo è chiamata Chain Ladder Incurred, e si basa sul triangolo ottenuto dalla somma degli importi pagati cumulati e dell'ultima riserva. Questo mostra l'andamento del costo ultimo di ogni generazione sulla base dei pagamenti e dell'evoluzione della riserva residua nel corso del tempo.

ESEMPIO: triangolo di run-off incurred (importi pagati cumulati + importi riserva)

Dati aggiornati a bilancio 2023

<b>Incurred</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	20.700.000	20.800.000	20.100.000	19.700.000	19.610.000	19.457.000	19.407.000	19.403.000
2017	21.200.000	20.600.000	20.310.000	19.790.000	19.750.000	19.670.000	19.670.000	
2018	22.400.000	21.900.000	21.300.000	20.980.000	20.950.000	21.060.000		
2019	27.400.000	27.200.000	26.600.000	25.970.000	26.160.000			
2020	30.900.000	30.300.000	29.900.000	29.870.000				
2021	32.900.000	31.900.000	31.700.000					
2022	29.000.000	28.900.000						
2023	36.600.000							

# Chain Ladder Incurred (2/5)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Come per il metodo «Paid», anche sul triangolo degli incurred si possono determinare i «Link Ratio», o fattori di sviluppo.

Nel caso del Chain Ladder incurred, il fattore di sviluppo è un indicatore che misura l'evoluzione osservata del costo ultimo, di una specifica generazione, da un anno di osservazione al successivo.

ESEMPIO: triangolo di run-off dei Link Ratio  
Dati aggiornati a bilancio 2023

Link Ratio	1	2	3	4	5	6	7
2016	1,0048	0,9663	0,9801	0,9954	0,9922	0,9974	0,9998
2017	0,9717	0,9859	0,9744	0,9980	0,9959	1,0000	
2018	0,9777	0,9726	0,9850	0,9986	1,0053		
2019	0,9927	0,9779	0,9763	1,0073			
2020	0,9806	0,9868	0,9990				
2021	0,9696	0,9937					
2022	0,9966						
2023							

# Chain Ladder Incurred (3/5)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

L'individuazione di opportuni valori di sintesi, applicati alla diagonale del triangolo incurred, consente di stimare l'evoluzione futura del costo ultimo nel triangolo inferiore.

Per ogni anno di sviluppo, si determina quindi un Link Ratio «medio» sulla base di valutazioni attuariali degli andamenti osservati, individuando un vettore univoco da applicare alla diagonale per ottenere la stima del triangolo inferiore.

## ESEMPIO: diversi valori di sintesi di Link Ratio

Dati aggiornati a bilancio 2023

	1	2	3	4	5	6	7
Media Ponderata	0,984282	0,981729	0,983927	1,000347	0,997961	0,998722	0,999794
Media Semplice	0,984807	0,980557	0,982957	0,999824	0,997799	0,998715	0,999794
Media Ponderata 3 anni	0,981681	0,986577	0,987404	1,001798	0,997961	0,998722	0,999794
Media Semplice 3 anni	0,982246	0,986157	0,986763	1,001288	0,997799	0,998715	0,999794
Media Ponderata 5 anni	0,983170	0,984155	0,983927	1,000347	0,997961	0,998722	0,999794
Media Semplice 5 anni	0,983424	0,983399	0,982957	0,999824	0,997799	0,998715	0,999794
Min	0,969605	0,966346	0,974397	0,995431	0,992198	0,997430	0,999794
Max	1,004831	0,993730	0,998997	1,007316	1,005251	1,000000	0,999794

# Chain Ladder Incurred (4/5)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Una volta individuato il vettore di Link Ratio, questo viene applicato alla diagonale del triangolo per ottenere l'evoluzione del costo ultimo degli anni futuri. La differenza tra l'ultima colonna stimata e la diagonale del triangolo degli importi pagati cumulati, rappresenta la stima della riserva con metodo Chain Ladder Incurred.

ESEMPIO: stima triangolo inferiore col metodo Chain Ladder Incurred

Dati aggiornati a bilancio 2023

<b>Incurred Stimati</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	20.700.000	20.800.000	20.100.000	19.700.000	19.610.000	19.457.000	19.407.000	19.403.000
2017	21.200.000	20.600.000	20.310.000	19.790.000	19.750.000	19.670.000	19.670.000	19.665.946
2018	22.400.000	21.900.000	21.300.000	20.980.000	20.950.000	21.060.000	21.033.088	21.028.752
2019	27.400.000	27.200.000	26.600.000	25.970.000	26.160.000	26.106.648	26.073.286	26.067.912
2020	30.900.000	30.300.000	29.900.000	29.870.000	29.880.367	29.819.427	29.781.321	29.775.183
2021	32.900.000	31.900.000	31.700.000	31.190.483	31.201.308	31.137.674	31.097.884	31.091.474
2022	29.000.000	28.900.000	28.371.965	27.915.939	27.925.628	27.868.675	27.833.062	27.827.325
2023	36.600.000	36.024.715	35.366.504	34.798.055	34.810.132	34.739.138	34.694.745	34.687.594

<b>Pagati Cumulati</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	<b>Riserva Stimata</b>
2016	11.300.000	18.500.000	18.900.000	19.100.000	19.190.000	19.277.000	19.347.000	19.383.000	20.000
2017	11.700.000	18.800.000	19.210.000	19.390.000	19.470.000	19.540.000	19.580.000		85.946
2018	12.200.000	20.000.000	20.500.000	20.700.000	20.810.000	20.910.000			118.752
2019	15.300.000	24.700.000	25.200.000	25.480.000	25.610.000				457.912
2020	17.800.000	28.500.000	29.100.000	29.400.000					375.183
2021	18.200.000	29.300.000	30.200.000						891.474
2022	16.300.000	26.700.000							1.127.325
2023	20.200.000								14.487.594
									<b>17.564.186</b>

# Chain Ladder Incurred (5/5)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI



Esempio in R di stima della riserva sinistri con metodologia Chain Ladder Incurred.



# SENSITIVITY LINK RATIO

# Sensitivity Link Ratio (1/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Dopo aver fatto valutazioni con diverse metodologie (in questo caso con CL Paid & CL Incurred), occorre confrontare i valori stimati con quelli del bilancio civilistico per vedere se metodologie diverse portano a risultati significativamente diversi tra loro e per verificare la tenuta (o meno) della riserva sinistri appostata a bilancio.

ESEMPIO: Confronto tra riserva di bilancio e riserve stimate con metodologie Chain Ladder (Paid e Incurred)  
Dati aggiornati a bilancio 2023

<b>Generazione</b>	<b>Local GAAP</b>	<b>Chain Ladder Paid</b>	<b>Chain Ladder Incurred</b>
2016	20.000	0	20.000
2017	90.000	36.434	85.946
2018	150.000	98.274	118.752
2019	550.000	231.557	457.912
2020	470.000	409.476	375.183
2021	1.500.000	735.205	891.474
2022	2.200.000	1.297.556	1.127.325
2023	16.400.000	14.106.890	14.487.594
<b>Totale</b>	<b>21.380.000</b>	<b>16.915.391</b>	<b>17.564.186</b>

# Sensitivity Link Ratio (2/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Le stime finali, oltre a dipendere dai modelli applicati, derivano da tutta una serie di ipotesi: tipo di media utilizzata nella scelta dei link ratio osservati, funzione statistica adottata per i link ratio teorici, anni ipotizzati per la completa liquidazione dei sinistri, funzione utilizzata per la stima del fattore coda, eventuale esclusione di un outlier, granularità delle stime, ecc..

Il ventaglio di possibilità a disposizione dell'attuario che valuta la riserva sinistri, implica una serie di scelte metodologiche precise che rientrano nell'ambito dell'**expert judgement**.

Il giudizio esperto dell'attuario deve essere esplicitato e ben motivato nelle documentazioni redatte a supporto dei calcoli.

# Sensitivity Link Ratio (3/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

E' poi importante affiancare alle stime una serie di analisi di sensitività per verificare come cambierebbero le valutazioni con l'adozione di diverse tipologie di ipotesi: media degli ultimi 3 anni, media degli ultimi 5 anni, media di tutte le osservazioni, ecc..

Altre analisi di sensitività possono riguardare i percentili della distribuzione teorica delle riserva sinistri. Questo tipo di valutazioni consentono di misurare la volatilità delle stime partendo dalla stima del Mean Square Error Prediction (MSEP).

# Sensitivity Link Ratio (4/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Di seguito sono riportati i risultati dell'applicazione dei metodi Chain Ladder Paid e Incurred utilizzando la media ponderata di un diverso numero di Link Ratio.

Sensitivity su diverse medie di Link Ratio	CL Paid	CL Incurred
Ultima osservazione	17.709.482	22.437.847
Ultime due osservazioni	17.195.201	19.259.979
Ultime tre osservazioni	16.884.529	18.292.086
Ultime quattro osservazioni	16.862.696	17.769.388
Ultime cinque osservazioni	16.921.708	17.679.366
Ultime sei osservazioni	16.869.565	17.472.669
Tutte le osservazioni	16.915.391	17.564.186
<i>Min</i>	<i>16.862.696</i>	<i>17.472.669</i>
<i>Max</i>	<i>17.709.482</i>	<i>22.437.847</i>
<i>Media</i>	<i>17.051.224</i>	<i>18.639.360</i>
<i>Range</i>	<i>846.786</i>	<i>4.965.178</i>

La scelta della tipologia di media può influire in maniera significativa sul risultato complessivo della stima.

# Sensitivity Link Ratio (5/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Il giudizio esperto riguarda anche l'utilizzo dei Link Ratio teorici sia per la determinazione del fattore coda sia per sostituire eventualmente alcuni coefficienti di sviluppo osservati con quelli teorici, specialmente in caso di andamenti anomali nel trend di sviluppo del pagato o dell'incurved per effetto di alcuni outlier.

Le quattro funzioni teoriche adottate nella modellizzazione dei Link Ratio sono le seguenti:

- Esponenziale;
- Power;
- Inverse Power;
- Weibull.

La scelta dell'analista ricade tipicamente sulla funzione con la migliore bontà di fitting.

# Sensitivity Link Ratio (6/6)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI



Esempio in R di alcune sensitivity sui Link Ratio



# CHAIN LADDER CON INFLAZIONE

# Chain Ladder con Inflazione (1/7)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Le metodologie attuariali di tipo Chain Ladder considerano già implicitamente la componente inflattiva. In scenari macro-economici caratterizzati da una certa stabilità dell'inflazione non occorre quindi adottare particolari aggiustamenti all'interno dei modelli.

Una significativa discontinuità nell'andamento dell'inflazione (come nel caso del 2022) può indebolire i modelli attuariali, generando effetti distorsivi sulle stime.

Il metodo Chain Ladder può essere adattato per tener conto dei cambiamenti nell'andamento della componente inflattiva.

La scelta dei vettori di inflazione (passata e futura) rappresenta l'aspetto più importante per la stima della riserva sinistri all'interno dei modelli «Inflation Adjusted».

# Chain Ladder con Inflazione (2/7)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Il processo computazionale di un modello Chain Ladder Paid Inflation Adjusted viene così sintetizzato:

- raccolta dei dati storici relativi all'inflazione, desumibili da diverse fonti come quella dei «Prezzi al consumo F.O.I. esclusi i tabacchi»;
- applicazione dell'inflazione passata alle diagonali del triangolo di run-off dei pagati incrementali, con l'esclusione dell'ultima diagonale (che è quella relativa all'ultimo bilancio), per convertire le precedenti diagonali (e quindi i precedenti bilanci) in valori correnti di moneta;
- utilizzo di una metodologia Chain Ladder per stimare il sotto-triangolo aleatorio;
- stima di un vettore d'inflazione futura, utilizzando varie fonti (ad esempio DEF, Bloomberg, ecc.);
- applicazione dell'inflazione futura alle diagonali del sotto-triangolo aleatorio.

# Chain Ladder con Inflazione (3/7)



S.I.A. s.r.l.  
SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Vettore Inflazione Passata

Pagati Incrementali	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.300.000	7.200.000	400.000	200.000	90.000	87.000	70.000	36.000
2017	11.700.000	7.100.000	410.000	180.000	80.000	70.000	40.000	
2018	12.200.000	7.800.000	500.000	200.000	110.000	100.000		
2019	15.300.000	9.400.000	500.000	280.000	130.000			
2020	17.800.000	10.700.000	600.000	300.000				
2021	18.200.000	11.100.000	900.000					
2022	16.300.000	10.400.000						
2023	20.200.000							

Anno	Inflazione Passata	(1+Inflazione Passata)	Produttoria di (1+Inflazione Passata)
2016	-0,1%	99,9%	118,9%
2017	1,1%	101,1%	117,6%
2018	1,1%	101,1%	116,3%
2019	0,5%	100,5%	115,8%
2020	-0,3%	99,7%	116,1%
2021	1,9%	101,9%	113,9%
2022	8,1%	108,1%	105,4%
2023	5,4%	105,4%	100,0%

Pagati Incrementali Inflazionati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	13.436.386	8.468.088	465.331	231.508	104.492	99.126	73.780	36.000
2017	13.760.643	8.259.620	474.591	208.984	91.150	<b>73.780</b>	40.000	
2018	14.192.586	9.028.805	580.511	227.875	115.940	100.000		
2019	17.710.347	<b>10.913.608</b>	569.687	295.120	130.000			
2020	20.666.193	12.191.302	632.400	300.000				
2021	20.736.607	11.699.400	900.000					
2022	17.180.200	10.400.000						
2023	20.200.000							

1 + 1,9%

101,9% \* 108,1% \* 105,4%

70.000 \* 105,4%

9.400.000 \* 116,1%

# Chain Ladder con Inflazione (4/7)



Sviluppo Iniziative Attuariali

## Vettore Inflazione Futura

Cumulati Stimati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	13.436.386	21.904.474	22.369.804	22.601.312	22.705.804	22.804.930	22.878.710	22.914.710
2017	13.760.643	22.020.263	22.494.854	22.703.838	22.794.988	22.868.768	22.908.768	22.944.815
2018	14.192.586	23.221.391	23.801.902	24.029.777	24.145.717	24.245.717	24.306.116	24.344.362
2019	17.710.347	28.623.955	29.193.642	29.488.762	29.618.762	29.734.821	29.808.895	29.855.800
2020	20.666.193	32.857.495	33.489.895	33.789.895	33.940.881	34.073.877	34.158.760	34.212.509
2021	20.736.607	32.436.007	33.336.007	33.656.673	33.807.064	33.939.535	34.024.084	34.077.621
2022	17.180.200	27.580.200	28.200.513	28.471.780	28.599.003	28.711.066	28.782.590	28.827.880
2023	20.200.000	32.380.256	33.108.528	33.427.007	33.576.371	33.707.938	33.791.910	33.845.082

Anno	Inflazione Futura	(1+Inflazione Futura)	Produttoria di (1+Inflazione Futura)
2024	2,3%	102,3%	102,3%
2025	2,0%	102,0%	104,3%
2026	2,0%	102,0%	106,4%
2027	2,0%	102,0%	108,6%
2028	2,0%	102,0%	110,7%
2029	2,0%	<b>102,0%</b>	<b>112,9%</b>
2030	2,0%	102,0%	115,2%
2031	2,0%	102,0%	117,5%

Incrementali Stimati Inflazionati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	13.436.386	8.468.088	465.331	231.508	104.492	99.126	73.780	36.000
2017	13.760.643	8.259.620	474.591	208.984	91.150	73.780	40.000	36.876
2018	14.192.586	9.028.805	580.511	227.875	115.940	100.000	61.789	39.908
2019	17.710.347	10.913.608	569.687	295.120	130.000	118.729	77.293	49.922
2020	20.666.193	12.191.302	632.400	300.000	154.459	138.775	90.344	58.351
2021	20.736.607	11.699.400	900.000	328.042	156.927	140.993	91.787	59.283
2022	17.180.200	10.400.000	634.580	<b>283.056</b>	135.407	121.658	79.200	51.154
2023	20.200.000	<b>12.460.402</b>	759.923	338.966	162.153	145.688	94.844	61.258

1 + 2,0%

102,3% \* 102% \* 102% \* 102% \* 102% \* 102%

Chain Ladder Paid	16.915.391
Chain Ladder Paid Inflation Adjusted	16.931.766
Impatto Inflazione	16.375
<b>Impatto % Inflazione</b>	<b>0,097%</b>

$(32.380.256 - 20.200.000) * (102,3\%)$

$(28.471.780 - 28.200.513) * (104,3\%)$

# Chain Ladder con Inflazione (5/7)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Alcune domande?

- I vettori dell'inflazione adottati all'interno dei modelli attuariali rappresentano realmente la «Claims Inflation» della compagnia che si sta analizzando?
- Nel corso del 2022 il dato dei «Prezzi al consumo F.O.I. esclusi i tabacchi» è stato superiore all'8%; anche la «Claims Inflation» del 2022 è stata superiore all'8%?
- Il vettore dell'inflazione dovrebbe cambiare in base al ramo ministeriale che si sta valutando?

## Alcuni punti fermi

- Valori alti d'inflazione passata diminuiscono le stime perché riducono i link ratio;
- Valori alti d'inflazione futura aumentano le stime;
- Occorre individuare un equilibrio tra il valore dell'inflazione passata e futura per evitare possibili sottostime del fenomeno all'interno dei modelli attuariali.

# Chain Ladder con Inflazione (6/7)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Per calibrare i vettori dell'inflazione che verranno adottati nei modelli attuariali è interessante fare una serie di sensitivity volte a misurare l'elasticità dalle stime rispetto ai diversi scenari di «Claims Inflation»:

- incremento/decremento valori dell'inflazione;
- scelta di valori medi o aggiustamenti *ad hoc*;
- media mobile del vettore dell'inflazione.

Chain Ladder Paid	16.915.391
Chain Ladder Paid Inflation Adjusted Caso Base	16.931.766
Chain Ladder Paid Inflation Adjusted con incremento 3% Inflazione 2023 (=5,4%+3%=8,4%)	16.903.555
Chain Ladder Paid Inflation Adjusted con decremento 3% Inflazione 2023 (=5,4%-3%=2,4%)	16.964.149
Chain Ladder Paid Inflation Adjusted con incremento 2% Inflazione 2024 (=2,3%+2%=4,3%)	17.262.787
Chain Ladder Paid Inflation Adjusted con decremento 2% Inflazione 2024 (=2,3%-2%=0,3%)	16.600.744
Chain Ladder Paid Inflation con Media Mobile Inflazione	17.314.370

# Chain Ladder con Inflazione (7/7)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI



Esempio in R di Chain Ladder con Inflazione



# FORMULA DI MACK

# Formula di Mack (1/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

I metodi deterministici forniscono una stima puntuale della riserva sinistri senza però misurare la volatilità della stessa.

Gli intervalli di variazione delle stime vengono così ricavati dai diversi metodi applicati o sono basati su una serie di analisi di sensitività relative ad alcuni fattori.

Le valutazioni stocastiche consentono sempre di pervenire, in modo rigoroso, ad una stima dei momenti di primo ordine (media) e di secondo ordine (varianza) della distribuzione di probabilità della riserva.

L'obiettivo dei modelli stocastici è di determinare una distribuzione di probabilità completa della riserva sinistri da cui poter trarre le principali statistiche.

Partendo dalla formula di Mack è possibile ricavare anche la distribuzione completa di probabilità con metodi analitici attraverso opportune ipotesi aggiuntive.

# Formula di Mack (2/9)



La formula di Mack (o «Distribution Free Chain Ladder») è la versione stocastica del tradizionale modello Chain Ladder.

Il valore atteso della riserva sinistri ottenuto col modello di Mack è quindi uguale a quello derivato con metodologia Chain Ladder.

Il modello consente di stimare i primi due momenti senza effettuare alcuna ipotesi distributiva.

Tutti i quantili possono poi essere calcolati facendo un'ipotesi aggiuntiva sulla forma della distribuzione di probabilità, che tendenzialmente si assume essere di tipo lognormale.

# Formula di Mack (3/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## IPOTESI

Valgono le stesse ipotesi alla base del Chain Ladder. Inoltre, si assume che la varianza dei pagamenti cumulati, condizionata all'informazione disponibile, sia proporzionale ai pagamenti cumulati stessi.

## STIMATORI DI MEDIA E VARIANZA

I fattori di proporzionalità sono i parametri da stimare sulla base dei dati del triangolo superiore.

La formula di Mack estende la logica deterministica del Chain Ladder stimando il «Prediction Error» (radice quadrata della varianza di previsione).

# Formula di Mack (4/9)

La Varianza di Previsione può essere scomposta in Varianza di Processo e Varianza di Stima.

A partire dalla variabile aleatoria  $R$ , che rappresenta la riserva sinistri, si definisce uno stimatore  $\tilde{R}$  ottenuto dai dati osservati e si determina il mean square error prediction come segue:

$$E[(R - \tilde{R})^2] = E[(R - E[R] + E[R] - \tilde{R})^2]$$

$$E[(R - \tilde{R})^2] \approx E[(R - E[R])^2] + E[(\tilde{R} - E[R])^2]$$

$$E[(R - \tilde{R})^2] \approx \text{VAR}(R) + \text{VAR}(\tilde{R})$$

E' possibile ottenere la scomposizione qui riportata, in cui il termine di covarianza si annulla per l'ipotesi di indipendenza tra le osservazioni passate e le previsioni future.

**Varianza di  
Processo**

variabilità insita nei dati stimati

**Varianza di Stima**

incertezza nella stima dei parametri  
del modello

# Formula di Mack (5/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Generazione	Process Variance	Estimation Variance	Prediction Error Mack
2017	156.683.172	158.570.140	17.755
2018	678.921.569	457.201.994	33.706
2019	1.041.985.465	780.859.580	42.695
2020	1.367.638.060	1.096.590.194	49.641
2021	1.735.045.635	1.265.433.782	54.777
2022	13.440.091.734	3.303.491.010	129.397
2023	104.939.835.326	22.344.534.003	356.769
<b>Totale</b>	<b>123.360.200.959</b>	<b>66.123.526.315</b>	<b>435.297</b>

$\sqrt{\text{Process Variance} + \text{Estimation Variance}}$

Il Prediction Error totale non è uguale alla somma dei Prediction Error relativi alle diverse generazioni, perché nella varianza di stima esiste correlazione tra generazioni.

$$\text{CoV}(\text{Mack}) = \frac{\text{Prediction Error}}{\text{Riserva Teorica}} = 0,026$$

Il CoV di Mack è una misura di volatilità data dal rapporto tra il Prediction Error ed il valore atteso della riserva teorica.



# Formula di Mack (6/9)

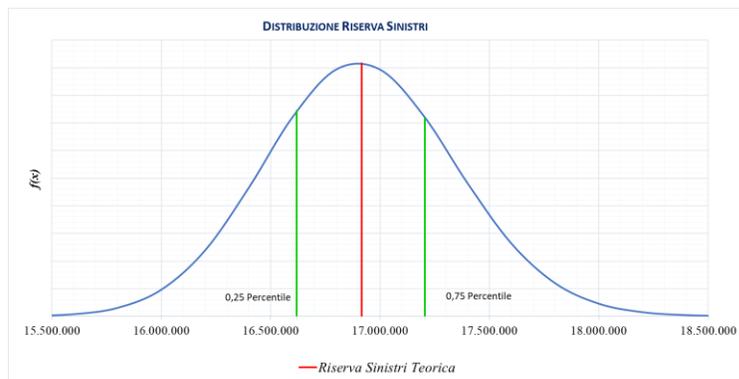
Dopo aver stimato la riserva teorica e calcolato il relativo Prediction Error, ipotizzando una certa forma funzionale (ad esempio di tipo lognormale), è possibile ricavare tutti i percentili della distribuzione.

Riserva Teorica	Prediction Error Mack
16.915.391	435.297

Mack	Log-Normal
Mu	16,643
Sigma	0,026

$LN(Riserva Teorica) - 0,5 * Sigma^2$

$\sqrt{LN(1 + Prediction Error^2 / Riserva Teorica^2)}$



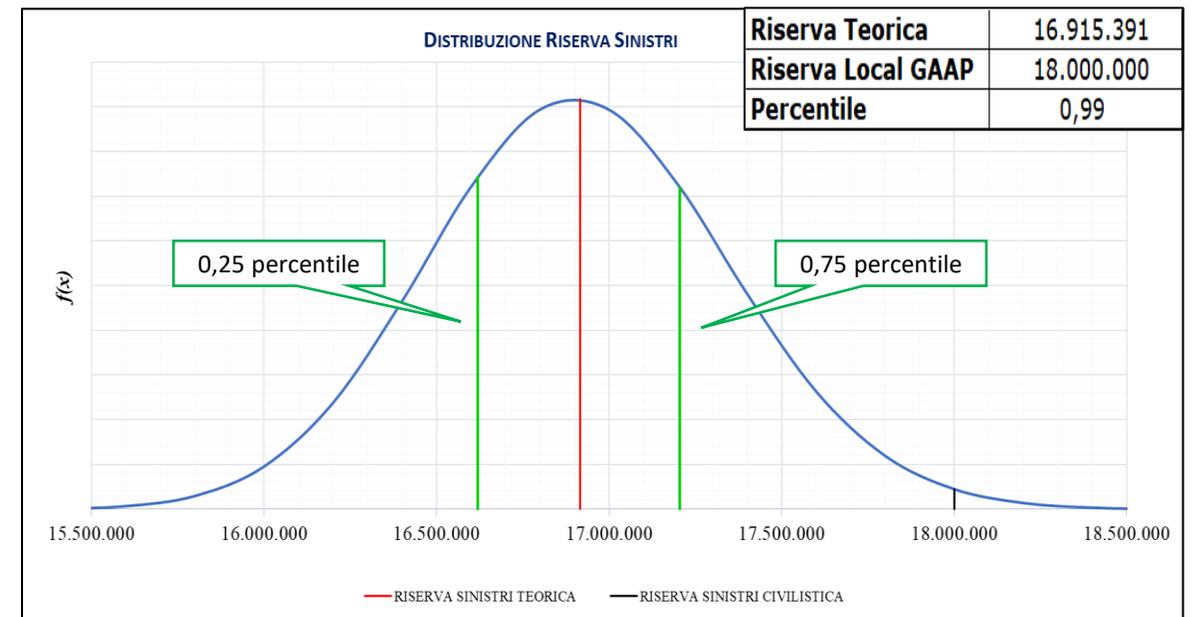
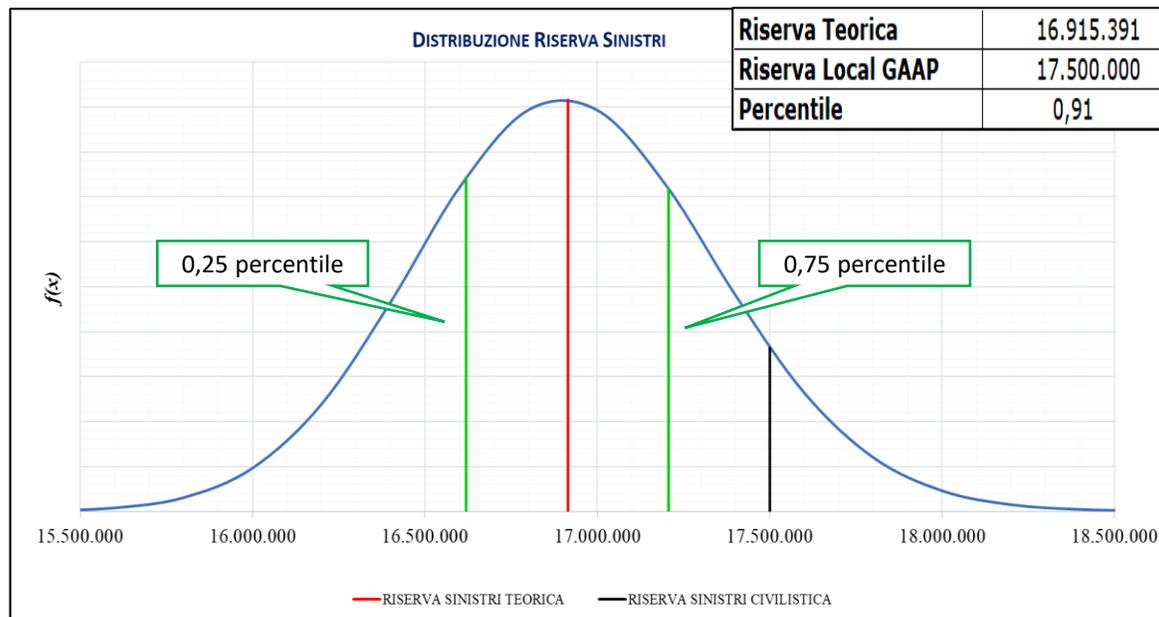
Principali Percentili	Riserva Teorica
0,25	16.618.867
0,5	16.909.793
0,7	17.139.496
0,75	17.205.812
0,9	17.476.666

# Formula di Mack (7/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

La distribuzione teorica della riserva sinistri consente di misurare, in termini di percentili, il livello di prudenza insito nella riservazione. Questo tipo di analisi può risultare utile anche per una verifica a costo ultimo della riserva sinistri del bilancio civilistico.



# Formula di Mack (8/9)



La formula di Mack «classica» si basa su un Chain Ladder Paid con link ratio pari alla media ponderata di tutte le osservazioni.

E' possibile fare anche una serie di sensitivity per capire come cambia la volatilità della stima rispetto al tipo di media adottato nel calcolo dei link ratio, all'esclusione di un link ratio o di un sinistro considerato outlier.

<b>Anni considerati</b>	<b>Tipo di Media</b>	<b>Prediction Error</b>	<b>Valore Atteso</b>	<b>CoV</b>
3	Ponderata	585.888	16.884.529	3,5%
5	Ponderata	470.914	16.921.708	2,8%
7	Ponderata	435.297	16.915.391	2,6%
3	Semplice	616.055	16.876.357	3,7%
5	Semplice	507.474	16.931.340	3,0%
7	Semplice	478.655	16.918.363	2,8%

# Formula di Mack (9/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI



Esempio in R di Formula di Mack



# BOOTSTRAPPING

# Bootstrapping (1/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Il bootstrapping è una tecnica alternativa per il calcolo del prediction error basata sulla determinazione di una distribuzione simulata di probabilità.

La metodologia fa riferimento alla tecnica del «campionamento con ripetizione» dei dati osservati, al fine di creare un numero elevato di insiemi di pseudo-dati.

Una volta ottenuto il numero di campioni stabilito a priori, si calcola per ogni campione il valore della misura d'interesse.

Le simulazioni permettono di ottenere la distribuzione della riserva complessiva e delle singole riserve per ogni generazione.

Il valor medio di tale distribuzione corrisponde alla riserva teorica.

Varianza ed asimmetria forniscono indicazione sulla variabilità della stima.

# Bootstrapping (2/9)



Un volta determinato il triangolo del pagato cumulato

Pagati Cumulati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.300.000	18.500.000	18.900.000	19.100.000	19.190.000	19.277.000	19.347.000	19.383.000
2017	11.700.000	18.800.000	19.210.000	19.390.000	19.470.000	19.540.000	19.580.000	
2018	12.200.000	20.000.000	20.500.000	20.700.000	20.810.000	20.910.000		
2019	15.300.000	24.700.000	25.200.000	25.480.000	25.610.000			
2020	17.800.000	28.500.000	29.100.000	29.400.000				
2021	18.200.000	29.300.000	30.200.000					
2022	16.300.000	26.700.000						
2023	20.200.000							

il processo è suddiviso nei seguenti step:

1) Si calcolano i fattori di sviluppo dal triangolo cumulato mediante il metodo Chain

$$\text{Ladder } \lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

$i=0, \dots, n$ =anno di generazione  
 $j=0, \dots, n$ =anno di sviluppo

Link Ratio	1	2	3	4	5	6	7
	1,619649805	1,023676681	1,010273669	1,004842329	1,004321507	1,002833381	1,001860754

# Bootstrapping (3/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

2) Si calcolano ricorsivamente, partendo dai pagamenti cumulati dell'ultima diagonale, i dati cumulati a ritroso con i fattori di sviluppo ricavati nel punto precedente  $\dot{C}_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{\lambda_j}$

Pagati Cumulati Ricalcolati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.412.769	18.484.688	18.922.345	19.116.746	19.209.316	19.292.329	19.347.000	19.383.000
2017	11.550.215	18.707.303	19.150.230	19.346.973	19.440.658	19.524.671	19.580.000	
2018	12.369.735	20.034.638	20.508.992	20.719.695	20.820.026	20.910.000		
2019	15.215.586	24.643.921	25.227.408	25.486.586	25.610.000			
2020	17.551.909	28.427.946	29.101.026	29.400.000				
2021	18.214.741	<b>29.501.502</b>	30.200.000					
2022	16.485.045	26.700.000						
2023	20.200.000							

$\frac{30.200.000}{1,023677}$

3) Si determinano i valori incrementali del nuovo triangolo  $\dot{P}_{i,j} = \dot{C}_{i,j+1} - \dot{C}_{i,j}$

Pagati Incrementali Ricalcolati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.412.769	7.071.920	437.656	194.402	92.570	83.013	54.671	36.000
2017	11.550.215	7.157.088	442.927	196.743	93.684	84.013	55.329	
2018	12.369.735	7.664.904	474.354	210.703	100.332	89.974		
2019	15.215.586	9.428.335	583.486	259.178	123.414			
2020	17.551.909	10.876.037	673.079	298.974				
2021	18.214.741	11.286.761	698.498					
2022	16.485.045	10.214.955						
2023	20.200.000							

# Bootstrapping (4/9)



Sviluppo Iniziative Attuariali

4) Si calcola il triangolo degli scarti standardizzati di Pearson  $r_{i,j}^P = \frac{P_{i,j} - \dot{P}_{i,j}}{\sqrt{\dot{P}_{i,j}}}$

Residui di Pearson	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	-33,38	48,16	-56,92	12,70	-8,45	13,84	65,56	-0,00
2017	44,07	-21,34	-49,47	-37,75	-44,71	-48,35	-65,17	
2018	-48,26	48,80	37,24	-23,32	30,52	33,43		
2019	21,64	-9,23	-109,29	40,90	18,75			
2020	59,22	-53,38	-89,08	1,88				
2021	-3,45	-55,59	241,10					
2022	-45,58	57,90						
2023	0,00							

$$\frac{(300.000 - 298.974)}{\sqrt{298.974}}$$

5) Si ricavano gli scarti di Pearson «adjusted»  $r_{i,j}^{adj} = r_{i,j}^P * \sqrt{\frac{n(n+1)/2}{n(n+1)/2 - (2n-1)}}$

Residui di Pearson Corretti	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	-43,71	63,06	-74,53	16,62	-11,06	18,12	85,84	-0,00
2017	57,71	-27,94	-64,78	-49,42	-58,54	-63,30	-85,33	
2018	-63,19	63,89	48,75	-30,53	39,96	43,76		
2019	28,33	-12,08	-143,10	53,55	24,54			
2020	77,53	-69,89	-116,63	2,46				
2021	-4,52	-72,79	315,67					
2022	-59,67	75,81						
2023	0,00							

n=numero di generazioni=8

fattore di correzione =1,31  
circa

# Bootstrapping (5/9)



6) Si ottiene un nuovo triangolo di residui corretti tramite campionamento con reinserimento

Residui di Pearson Rimescolati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	28,33	39,96	-59,67	-85,33	-4,52	0,00	48,75	-64,78
2017	16,62	2,46	-30,53	-11,06	-59,67	-85,33	-74,53	
2018	-30,53	48,75	-12,08	-4,52	-74,53	315,67		
2019	39,96	-63,30	-30,53	-59,67	-58,54			
2020	-85,33	24,54	-58,54	16,62				
2021	48,75	-27,94	0,00					
2022	16,62	63,06						
2023	43,76							

7) Si ricostruisce il triangolo dei pagamenti incrementali  $P_{i,j}^h = r_{i,j}^h \sqrt{\dot{P}_{i,j}} + \dot{P}_{i,j}$

Pagati Incrementali Corretti	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.508.489	7.178.199	398.179	156.781	91.194	83.013	66.070	23.709
2017	11.606.712	7.163.659	422.610	191.838	75.420	59.281	37.799	
2018	12.262.366	7.799.883	466.032	208.627	76.725	184.662		
2019	15.371.478	9.233.971	560.167	228.799	102.850			
2020	17.194.434	10.956.982	625.054	308.064				
2021	18.422.819	11.192.895	698.498					
2022	16.552.541	10.416.500						
2023	20.396.694							

$$16,62 * \sqrt{298.974} + 298.974$$

# Bootstrapping (6/9)



S.I.A. s.r.l.  
SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

8) Si costruisce il triangolo dei pagamenti cumulati  $C_{i,j}^h$ , da cui si ricava il sotto-triangolo dei pagamenti futuri.

Link Ratio	1	2	3	4	5	6	7
	1,621286541	1,022664221	1,009704	1,004084448	1,005485232	1,00266774	1,001216989

Pagati Cumulati Stimati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.508.489	18.686.688	19.084.868	19.241.648	19.332.842	19.415.855	19.481.925	19.505.635
2017	11.606.712	18.770.371	19.192.981	19.384.819	19.460.239	19.519.520	19.557.319	19.581.120
2018	12.262.366	20.062.249	20.528.282	20.736.908	20.813.634	20.998.296	21.054.314	21.079.937
2019	15.371.478	24.605.449	25.165.616	25.394.415	25.497.265	25.637.124	25.705.517	25.736.800
2020	17.194.434	28.151.415	28.776.470	29.084.534	29.203.328	29.363.515	29.441.849	29.477.680
2021	18.422.819	29.615.715	30.314.212	30.608.381	30.733.400	30.901.980	30.984.418	31.022.126
2022	16.552.541	26.969.041	27.580.273	27.847.912	27.961.656	28.115.032	28.190.036	28.224.343
2023	20.396.694	33.068.886	33.818.367	34.146.540	34.286.010	34.474.077	34.566.044	34.608.111

# Bootstrapping (7/9)



Sviluppo Iniziative Attuariali

9) Si ottiene il triangolo dei pagamenti incrementali  $P_{i,j}^h$  con il quale viene stimata la riserva sinistri.

Pagati Incrementali Stimati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.508.489	7.178.199	398.179	156.781	91.194	83.013	66.070	23.709
2017	11.606.712	7.163.659	422.610	191.838	75.420	59.281	37.799	23.801
2018	12.262.366	7.799.883	466.032	208.627	76.725	184.662	56.018	25.623
2019	15.371.478	9.233.971	560.167	228.799	102.850	139.858	68.393	31.283
2020	17.194.434	10.956.982	625.054	308.064	118.794	160.187	78.334	35.830
2021	18.422.819	11.192.895	698.498	294.169	125.018	168.580	82.438	37.708
2022	16.552.541	10.416.500	611.232	267.639	113.743	153.376	75.004	34.307
2023	20.396.694	12.672.192	749.481	328.173	139.470	188.067	91.968	42.066

Riserva Sinistri
0
23.801
81.641
239.535
393.146
707.913
1.255.301
14.211.417
<b>16.912.754</b>

10) Si ripetono gli step 6,7,8,9 per un numero di simulazioni pari ad n, ottenendo così la distribuzione teorica della riserva.

# Bootstrapping (8/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

Il prediction error ottenuto con Bootstrapping non è però pienamente comparabile con quello di Mack, dal momento che col primo metodo si ricava unicamente l'Estimation Error, motivo per cui il coefficiente di variabilità ottenuto con bootsrapping può essere minore di quello derivato con formula di Mack.

Per misurare anche la componente di Process Error si possono utilizzare 2 differenti approcci:

- Formula chiusa;
- Algoritmo simulativo da applicare sui risultati del Bootstrapping ipotizzando una distribuzione tipo (ad esempio ODP).

# Bootstrapping (9/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI



Esempio in R di Bootstrapping



# MODELLI GLM

# Modelli GLM (1/9)

## Caratteristiche principali

I **Modelli Lineari Generalizzati** (GLM) rappresentano una generalizzazione del classico modello lineare. Mentre per quest'ultimo si ipotizza che la variabile risposta ( $Y$ ) sia distribuita in modo normale, nell'ambito dei GLM la variabile risposta ( $Y$ ) può essere distribuita come una qualsiasi variabile aleatoria appartenente alla **famiglia esponenziale** (poisson, gamma, ecc.).

I GLM sono molto utilizzati in ambito pricing e possono essere applicati anche in alcune metodologie di reserving per la stima della riserva sinistri e del prediction error.

La relazione tra il valore atteso della variabile risposta e le variabili esplicative è espressa dalla formula  $g(\mu_i) = x_i' \beta$ , dove  $\beta$  è il vettore dei parametri e  $g$  è la funzione di link.

# Modelli GLM (2/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Caratteristiche principali

Valore atteso e varianza sono indicati nelle formule sotto.

$$E(Y_i) = \mu_i = g^{-1}(x_i' \beta)$$

$V(\mu_i)$  può essere indicata con la formula  $V(\mu_i) = \mu^p$

P = 0 => Normale

P = 1 => Poisson

P = 2 => Gamma

P = 3 => Gaussiana Inversa

$$var(Y_i) = \frac{\phi}{\omega_i} V(\mu_i)$$

Dove  $\phi$  è un parametro di dispersione e  $V$  la funzione di varianza che caratterizza la famiglia delle distribuzioni della variabile risposta.

I parametri di regressione  $\beta$  ed il parametro di dispersione  $\phi$  sono stimati dalle osservazioni. I pesi  $\omega_i$  possono essere utilizzati per tenere in considerazione la credibilità delle osservazioni.

## Matrice di regressione

I GLM possono essere applicati a modelli «individuali» ed «aggregati».

La variabile risposta è sempre la riserva sinistri, però, nel caso dei modelli «individuali», si considerano, per ciascun sinistro Reported But Not Settled (RBNS), una serie di esplicative in grado di definire la severità del danno.

Nei modelli «aggregati» invece si stima la riserva complessiva (Reported e Not Reported) utilizzando solo le variabili generazione ed antidurata del sinistro, come nella classica metodologia di tipo Chain Ladder. Queste due esplicative vengono trattate come variabili categoriche.

Ad esempio, per un triangolo di run-off che considera i sinistri accaduti tra il 2016 ed 2023, le variabili generazione ed antidurata, che presentano ciascuna 8 modalità risposta, si trasformano in 14 ( $=2*(8-1)$ ) variabili dummy.



# Modelli GLM (5/9)



## Stima parametri ODP

Il vettore dei parametri del modello è stimato col metodo della massima verosimiglianza.

Parameter	Estimate	Std Error	Test	Exp(Estimate)
(Intercept)	16,25024334	0,018626628	<.0001	11.412.768,61
base(origin)2016	0			1
factor(origin)2017	0,011971268	0,025262112	0,640474	1,012043211
factor(origin)2018	0,080519947	0,024868697	0,003942	1,083850466
factor(origin)2019	0,28758753	0,023756995	<.0001	1,333207282
factor(origin)2020	0,430429946	0,023097353	<.0001	1,537918604
factor(origin)2021	0,46749845	0,022988071	<.0001	1,59599673
factor(origin)2022	0,367720827	0,023588883	<.0001	1,444438734
factor(origin)2023	0,570949822	0,025581114	<.0001	1,769947389
base(dev)0	0			1
factor(dev)1	-0,47860079	0,012566033	<.0001	0,619649805
factor(dev)2	-3,261054684	0,044088187	<.0001	0,038347932
factor(dev)3	-4,072560344	0,073708043	<.0001	0,01703372
factor(dev)4	-4,814527521	0,123471431	<.0001	0,008111053
factor(dev)5	-4,923488589	0,155865938	<.0001	0,007273712
factor(dev)6	-5,341158424	0,237997952	<.0001	0,004790318
factor(dev)7	-5,758969123	0,415759703	<.0001	0,003154362

Exp (Estimate) => modello di tipo moltiplicativo

# Modelli GLM (6/9)



Sviluppo Iniziative Attuariali

## Stima parametri ODP

Parameter	Estimate	Std Error	Test	Exp(Estimate)
(Intercept)	16,25024334	0,018626628	<.0001	<b>11.412.768,61</b>
base(origin)2016	0			1
factor(origin)2017	0,011971268	0,025262112	0,640474	<b>1,012043211</b>
factor(origin)2018	0,080519947	0,024868697	0,003942	1,083850466
factor(origin)2019	0,28758753	0,023756995	<.0001	1,333207282
factor(origin)2020	0,430429946	0,023097353	<.0001	1,537918604
factor(origin)2021	0,46749845	0,022988071	<.0001	1,59599673
factor(origin)2022	0,367720827	0,023588883	<.0001	1,444438734
factor(origin)2023	0,570949822	0,025581114	<.0001	<b>1,769947389</b>
base(dev)0	0			1
factor(dev)1	-0,47860079	0,012566033	<.0001	<b>0,619649805</b>
factor(dev)2	-3,261054684	0,044088187	<.0001	0,038347932
factor(dev)3	-4,072560344	0,073708043	<.0001	0,01703372
factor(dev)4	-4,814527521	0,123471431	<.0001	0,008111053
factor(dev)5	-4,923488589	0,155865938	<.0001	0,007273712
factor(dev)6	-5,341158424	0,237997952	<.0001	0,004790318
factor(dev)7	-5,758969123	0,415759703	<.0001	<b>0,003154362</b>

La stima della riserva sinistri del modello GLM con ODP restituisce gli stessi valori che si ottengono con il classico Chain Ladder Paid

Incrementali Stimati	0	1	2	3	4	5	6	7
2016								36.000
2017							40.000	36.434
2018						100.000	59.255	39.019
2019					130.000	110.674	72.888	47.995
2020				300.000	142.364	127.668	84.079	55.365
2021			900.000	310.265	147.741	132.489	87.254	57.456
2022		10.400.000	632.167	280.802	133.711	119.907	78.969	52.000
2023	20.200.000	12.516.926	774.628	344.081	163.843	146.929	96.764	63.718

$$11.412.768,61 * 1,012043211 * 0,003154362$$

$$11.412.768,61 * 1,769947389 * 0,619649805$$

# Modelli GLM (7/9)



SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI

## Sintesi ODP

Riserva Stimata	16.915.391	= $Riserva\ Stimata_{Chain\ Ladder\ Paid}$
Prediction Error	502.610	≠ $Prediction\ Error_{Mack}$
CoV	0,030	= $Prediction\ Error / Riserva\ Stimata$
Numero di Osservazioni	36	= $8 * (8 + 1) / 2 = 36$
Gradi di Libertà	21	= $36 - 15 = 21$
Parametro di Dispersione	6.210,330	= $\frac{1}{Gradi\ di\ Libertà} \sum Residui\ di\ Pearson^2$

$$Residui\ di\ Pearson = \frac{Osservato - Teorico}{\sqrt{V(Teorico)}} = \frac{Osservato - Teorico}{\sqrt{Teorico}},$$

poiché la funzione di varianza  $V(Teorico) = Teorico^p$  con  $p=1$

# Modelli GLM (8/9)



## Residui Pearson ODP

Parameter	Estimate	Std Error	Test	Exp(Estimate)
(Intercept)	16,25024334	0,018626628	<.0001	<b>11.412.768,61</b>
base(origin)2016	0			1
factor(origin)2017	0,011971268	0,025262112	0,640474	1,012043211
factor(origin)2018	0,080519947	0,024868697	0,003942	1,083850466
factor(origin)2019	0,28758753	0,023756995	<.0001	<b>1,333207282</b>
factor(origin)2020	0,430429946	0,023097353	<.0001	1,537918604
factor(origin)2021	0,46749845	0,022988071	<.0001	<b>1,59599673</b>
factor(origin)2022	0,367720827	0,023588883	<.0001	1,444438734
factor(origin)2023	0,570949822	0,025581114	<.0001	1,769947389
base(dev)0	0			1
factor(dev)1	-0,47860079	0,012566033	<.0001	0,619649805
factor(dev)2	-3,261054684	0,044088187	<.0001	<b>0,038347932</b>
factor(dev)3	-4,072560344	0,073708043	<.0001	0,01703372
factor(dev)4	-4,814527521	0,123471431	<.0001	0,008111053
factor(dev)5	-4,923488589	0,155865938	<.0001	0,007273712
factor(dev)6	-5,341158424	0,237997952	<.0001	0,004790318
factor(dev)7	-5,758969123	0,415759703	<.0001	0,003154362

### PAGATI INCREMENTALI TEORICI (ALCUNI ESEMPI)

$$11.412.768,61 * 1,59599673 * 1 = 18.214.741$$

$$11.412.768,61 * 1,333207282 * 0,038347932 = 583.486$$

$$\text{Residuo di Pearson}(2019,2) = \frac{500.000 - 583.486}{\sqrt{583.486}} = -109,295$$

Pagati Incrementali	0	1	2	3	4	5	6	7
2016	11.300.000	7.200.000	400.000	200.000	90.000	87.000	70.000	36.000
2017	11.700.000	7.100.000	410.000	180.000	80.000	70.000	40.000	
2018	12.200.000	7.800.000	500.000	280.000	110.000	100.000		
2019	15.300.000	9.400.000	500.000	280.000	130.000			
2020	17.800.000	10.700.000	600.000	300.000				
2021	18.200.000	11.100.000	900.000					
2022	16.300.000	10.400.000						
2023	20.200.000							

$$\text{Residuo di Pearson}(2017,5) = \frac{70.000 - 84.013}{\sqrt{84.013}} = -48,345$$

$$\text{Residuo di Pearson}(2021,0) = \frac{18.200.000 - 18.214.741}{\sqrt{18.214.741}} = -3,454$$

# Modelli GLM (9/9)



S.I.A. s.r.l.  
SVILUPPO INIZIATIVE ATTUARIALI



Esempio in R di GLM



# Confronto tra Modelli

<b>Modello</b>	<b>Riserva Teorica</b>	<b>Prediction Error</b>	<b>CoV</b>
Mack	16.915.391	435.297	2,57%
Bootstrapping	16.903.832	506.876	3,00%
GLM ODP	16.915.391	502.610	2,97%

<b>Percentili</b>	<b>0.25</b>	<b>0.5</b>	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
Mack	16.618.867	16.909.793	17.205.812	17.476.666	17.952.848	18.068.459
Bootstrapping	16.554.944	16.888.539	17.223.575	17.543.641	18.268.249	18.430.319
GLM ODP	16.570.334	16.913.622	17.258.435	17.572.834	18.087.372	18.224.255



# Grazie per l'attenzione!

Alessandro Barbaro

[binomiale.statbarbaro@gmail.com](mailto:binomiale.statbarbaro@gmail.com)